




Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

## 2. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

**Цели освоения дисциплины:** формирование понимания сущности теории интегральных уравнений и вариационного исчисления как фундаментальной науки, освоение ее основных понятий и идей решения интегральных уравнений, овладение методами и навыками решения вариационных задач различного типа.


**Задачи освоения дисциплины:** Изучение студентами методов решения наиболее часто встречающихся в физических задачах типов интегральных уравнений, приобретение навыков решения типовых интегральных уравнений первого и второго рода, нахождения общего решения уравнений Фредгольма и Вольтерра, овладение методом последовательных приближений и методом резольвенты для интегральных уравнений. Студенты должны знать методы решения вариационных задач различных типов и иметь представление о методах решения вариационных задач с различными граничными и дополнительными условиями.

## 3. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина относится к разделу Б1.О.51 обязательной части блока 1 ОПОП. Дисциплина следует за дисциплинами «Линейная алгебра», «Математический анализ».

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
ОПК – 1 Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности;	Знать: <ul style="list-style-type: none"> <li>• основные понятия и теоремы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления;</li> <li>• основные типы интегральных уравнений и вариационных задач;</li> <li>• основные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра;</li> </ul> Уметь: <ul style="list-style-type: none"> <li>• применять основные методы решения наиболее часто встречающихся в физических задачах типов интегральных уравнений и вариационных задач;</li> <li>• решать типовые интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода;</li> </ul> Владеть: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Опытном решении уравнений Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода;</li> </ul>

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		


<p>ОПК – 2</p> <p>Способен проводить экспериментальные и теоретические научные исследования объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• основные методы приближенного решения интегральных уравнений;</li> <li>• методы решения вариационных задач .</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• находить решения и собственные числа интегральных уравнений методом последовательных приближений и методом резольвенты;</li> <li>• применять методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений;</li> </ul> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Навыками решения интегрального уравнения методом последовательных приближений и методом резольвенты;</li> <li>• Навыками использования аппарата вариационного исчисления для решения физических задач.</li> </ul>
---	--

#### 4.ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего) 3 ЗЕТ

4.2. по видам учебной работы (в часах)


Вид учебной работы	Количество часов (форма обучения очная)			
	Всего по плану	В том числе по семестрам		
		3	4	5
1	2	3	4	5
Контактная работа обучающихся с преподавателем	36		36	
Аудиторные занятия:	36		36	
лекции	18		18	
Семинары и практические занятия	18		18	
Лабораторные работы, практикумы				
Самостоятельная работа	72		72	
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы: тестирование, контрольная работа, коллоквиум, реферат и др.(не менее 2 видов)	Тестирование, контрольная работа		Тестирование, контрольная работа	
Курсовая работа				
Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет)	ЗАЧЕТ		ЗАЧЕТ	
Всего часов по дисциплине	108		108	

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		


### 4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения – очная

Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий				Форма текущего контроля знаний	
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме		Самостоятельная работа
		лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторная работа			
Раздел 1. . Интегральные уравнения.							
1.Классификация интегральных уравнений. Метрическое пространство. Принцип сжатых отображений.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
2. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Уравнение Вольтерра. Резольвента.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
3. Теоремы Фредгольма. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма для уравнений с непрерывными ядрами. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных $\lambda$ .	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
4. Компактное множество. Ограниченные операторы. Вполне непрерывные линейные операторы. Самосопряженные линейные	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

операторы. Последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Применение теоремы Гильберта-Шмидта к решению уравнений. Формула Шмидта. Решение уравнений с эрмитовым ядром.							
5. Понятие о некорректно поставленных задачах. Метод регуляризации Тихонова.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 2. Вариационное исчисление.							
6. Простейшая задача вариационного исчисления. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
7. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами. Функционал зависящий от нескольких функций. Функционал зависящий от производных высших порядков. Функционал зависящий от	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

функции от нескольких переменных: функция зависит от двух переменных. Задача с закрепленными концами.							
8. Задача с незакрепленными концами. Общая формула вариации функционала с незакрепленными концами. Задача с незакрепленными концами для функционала от одной функции. Задача с незакрепленными концами для функционала от двух функций. Экстремали с изломами. Задача об отражении экстремалей. Преломление экстремалей. Односторонние экстремумы.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
9. Условные экстремумы. Задача Лагранжа. Обобщение изопериметрической задачи. Задача Больца.	12	2	2			8	устный опрос, проверка решения задач
ИТОГО	108	18	18			72	

## 5. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА


### Раздел 1. Интегральные уравнения.

**Тема 1.** Классификация интегральных уравнений. Метрическое пространство. Принцип сжатых отображений.

**Тема 2.** Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Уравнение Вольтерра. Резольвента.

**Тема 3.** Теоремы Фредгольма. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма для уравнений с непрерывными ядрами. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных  $\lambda$ .

**Тема 4.** Компактное множество. Ограниченные операторы. Вполне непрерывные линейные операторы. Свойства. Самосопряженные линейные операторы. Последовательности

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Применение теоремы Гильберта-Шмидта к решению уравнений. Формула Шмидта. Решение уравнений с эрмитовым ядром.

**Тема 5.** Понятие о некорректно поставленных задачах. Метод регуляризации Тихонова.

## **Раздел 2. Вариационное исчисление.**

**Тема 6.** Простейшая задача вариационного исчисления. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

**Тема 7.** Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами. Функционал зависящий от нескольких функций. Функционал зависящий от производных высших порядков. Функционал зависящий от функции от нескольких переменных: функция зависит от двух переменных.

**Тема 8.** Задача с незакрепленными концами. Общая формула вариации функционала с незакрепленными концами. Задача с незакрепленными концами для функционала от одной функции. Задача с незакрепленными концами для функционала от двух функций.

Экстремали с изломами. Задача об отражении экстремалей. Преломление экстремалей. Односторонние экстремумы.

**Тема 9.** Условные экстремумы. Задача Лагранжа. Обобщение изопериметрической задачи. Задача Больца.

## **6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ**

### **Раздел 1. Интегральные уравнения.**

1. Составление интегральных уравнений, соответствующих задачам Коши. Решение интегральных уравнений, сводя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
2. Решение интегральных уравнений Вольтерра методом последовательных приближений.
3. Нахождение резольвенты для уравнений Вольтерра. Решение интегральных уравнений при помощи резольвенты.
4. Решение интегральных уравнений Фредгольма методом последовательных приближений.
5. Нахождение резольвенты для уравнений Фредгольма. Решение интегральных уравнений при помощи резольвенты.
6. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с симметричными ядрами.

### **Раздел 2. Вариационное исчисление.**


7. Нахождение экстремалей функционала удовлетворяющих граничным условиям. Нахождение экстремалей функционала от нескольких функций, удовлетворяющих граничным условиям. Нахождение экстремалей функционала от производных высших порядков.
8. Решение задач с подвижными границами. Задача Больца.
9. Решение задач на условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи.

## **7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ (ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ)**

Лабораторные работы не предусмотрены учебным планом.

## **8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ**

Курсовые, контрольные работы, рефераты не предусмотрены учебным планом.

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		


## 9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ(ЗАЧЕТУ)

1. Классификация интегральных уравнений. Метрическое пространство. Принцип сжатых отображений.
2. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма 2-го рода.
3. Уравнение Вольтерра. Резольвента.
4. Теоремы Фредгольма. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами и с непрерывными ядрами.
5. Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля.
6. Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля.
7. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных  $\lambda$ .
8. Теорема Гильберта-Шмидта.
9. Применение теоремы Гильберта-Шмидта к решению уравнений. Формула Шмидта.
10. Последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора.
11. Самосопряженные линейные операторы. Решение уравнений с эрмитовым ядром.
12. Простейшая задача вариационного исчисления. Основные леммы вариационного исчисления.
13. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
14. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами.
15. Задача с незакрепленными концами.
16. Экстремали с изломами.
17. Задача об отражении экстремалей. Преломление экстремалей.
18. Условные экстремумы.


## 10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)	Объем в часах	Форма контроля (проверка решения задач, реферата и др.)
Классификация интегральных уравнений. Метрическое пространство. Принцип сжатых отображений.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра. Метод последовательных приближений для	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач




Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Уравнение Вольтерра. Резольвента.			
Теоремы Фредгольма. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма для уравнений с непрерывными ядрами. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных $\lambda$ .	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Компактное множество. Ограниченные операторы. Вполне непрерывные линейные операторы. Самосопряженные линейные операторы. Последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Применение теоремы Гильберта-Шмидта к решению уравнений. Формула Шмидта. Решение уравнений с эрмитовым ядром.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Понятие некорректно поставленных задач. Метод регуляризации Тихонова.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Простейшая задача вариационного исчисления. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

интегрируемости уравнения Эйлера.			
Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами. Функционал зависящий от нескольких функций. Функционал зависящий от производных высших порядков. Функционал зависящий от функции от нескольких переменных: функция зависит от двух переменных. Задача с закрепленными концами.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Задача с незакрепленными концами. Общая формула вариации функционала с незакрепленными концами. Задача с незакрепленными концами для функционала от одной функции. Задача с незакрепленными концами для функционала от двух функций. Экстремали с изломами. Задача об отражении экстремалей. Преломление экстремалей. Односторонние экстремумы.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач
Условные экстремумы. Задача Лагранжа. Обобщение изопериметрической задачи. Задача Больца.	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета.	8	устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

## 11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) Список рекомендуемой литературы

#### Основная:

1. Вахрушев Н.В., Специальные функции. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: учеб. пособие. / Н.В. Вахрушев, Т.М. Назарова, В.В. Хаблов - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. - 72 с. - ISBN 978-5-7782-1834-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778218345.html>
2. Позднякова, Т. А. Математика. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Элементы векторного анализа : учебное пособие / Т. А. Позднякова, А. Н. Ботвич. — Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2018. — 113 с. — ISBN 978-5-7638-3920-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/84228.html>
3. Бренерман, М. Х. Вариационное исчисление : учебное пособие / М. Х. Бренерман, В. А. Жихарев. — Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. — 148 с. — ISBN 978-5-7882-2198-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/79275.html>


#### дополнительная литература:

1. Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Васильева А. Б. , Медведев Г. Н. , Тихонов Н. А. , Уразгильдина Т. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 432 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10) - ISBN 5-9221-0276-1. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html>
2. Моклячук, М. П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи : учебник / М. П. Моклячук. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 428 с. — ISBN 978-5-4344-0695-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91913.html>
3. Трофимов, В. К. Интегральное исчисление : учебное пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова. — Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2013. — 249 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45469.html>

#### Учебно-методическая:

1. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения / В. К. Щиголов; УлГУ, ИФФВТ. - Ульяновск : УлГУ, 2019. – URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/8319>

Согласовано:

Ведущий специалист ООП НБ УлГУ / Чамеева А.Ф. /  / \_\_\_\_\_ 2023 г. \_\_\_\_\_

(Должность работника научной библиотеки)

( ФИО )


(подпись)

(дата)

б) Программное обеспечение: МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.

в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы:



Министерство науки и высшего образования РФ ФГБОУВПО Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине « Интегральные уравнения и вариационное исчисление»		

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для предоставления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе. Перечень оборудования, используемого в учебном процессе, указывается в соответствии со сведениями о материально-техническом обеспечении и оснащённости образовательного процесса, размещёнными на официальном сайте УлГУ в разделе «Сведения об образовательной организации».

### 13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

Разработчик  профессор Учайкин В.В.  
подпись должность ФИО